Vectori. Noțiuni de calcul vectorial

Vectorii sunt segmente de dreaptă orientate, Fig.1. Elementele unui vector sunt:

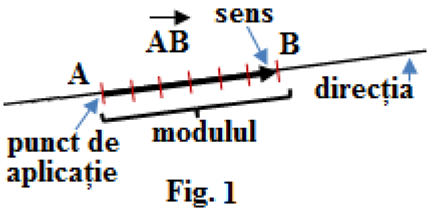


Fig. 1

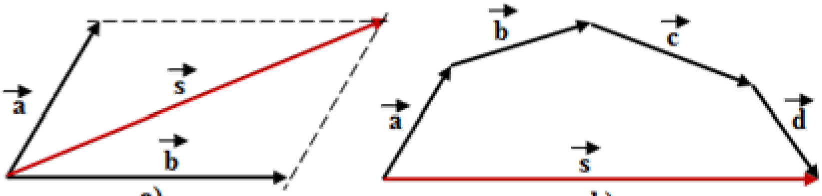
- modulul, numărul de unități scalare;
- direcția, sau suportul vectorului, dreapta pe care este delimitat segmentul de dreaptă;
- sensul, sau vârful vectorului, notat B;
- punctul de aplicație, notat A.

Mărimea fizică vectorială se notează cu litera care i-a fost consacrată, dar cu o săgeată deasupra. Notația mărimii fizice respective fără semnul de vector reprezintă modulul vectorului respectiv. De exemplu: mărimea fizică vectorială forța se notează $\vec{F}$. Notația $F = |\vec{F}|$ este modulul vectorului $\vec{F}$.

Operații cu vectori.

1. Adunarea vectorilor.

a) **Metoda paralelogramului.** *Suma a doi vectori este dată de diagonala paralelogramului construit cu cei doi vectori ca laturi, având același punct de aplicație,* $\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{s}}$, Fig. 2a). Se observă că adunarea vectorilor este comutativă.



a) Fig. 2 b)

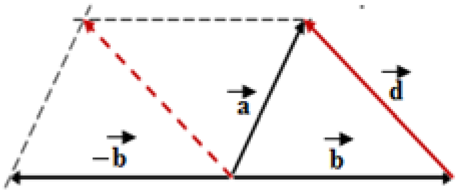


Fig. 3

b) **Metoda poligonului.** Vectorul sumă este linia de închidere a conturului poligonal construit cu vectorii componenți, $\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}} + \vec{\boldsymbol{d}} = \vec{\boldsymbol{s}}$, Fig. 2b).

c) **Scăderea vectorilor.** Scăderea este o adunare cu semn schimbat. $\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \left(-\vec{\boldsymbol{b}}\right) = \vec{\boldsymbol{d}}$, Fig. 3.

Se observă că vectorul diferență, $\vec{d}$, unește vârfurile celor doi vectori în sensul de la descăzut la scăzător.

Componentele unui vector. Orice vector se poate descompune într-un sistem de axe perpendiculare.

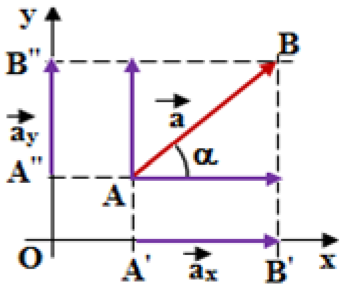


Fig. 4

Descompunerea este operația inversă compunerii și se realizează prin proiectarea vectorului pe cele două (sau trei) axe. Proiecțiile astfel obținute se numesc componente, $\vec{a}_x$ și $\vec{a}_y$, Fig. 4.

Se observă că: $\vec{\boldsymbol{a}}_x + \vec{\boldsymbol{a}}_y = \vec{\boldsymbol{a}}$ (1)

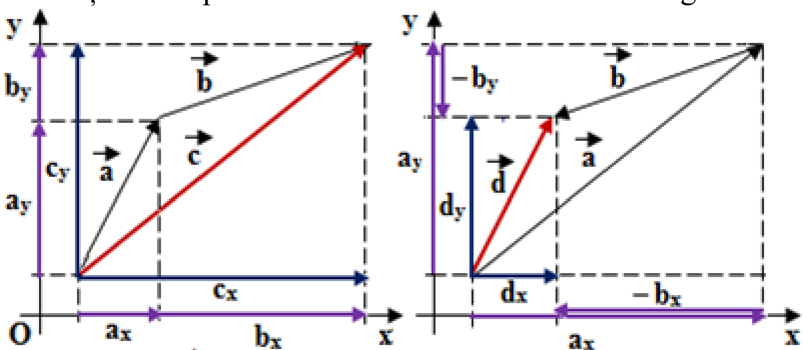
De asemenea, dacă notăm cu $\boldsymbol{\alpha}$ unghiul pe care-l face vectorul cu axa Ox, atunci:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_x = a \cdot \cos\alpha} \\ \boldsymbol{a_y = a \cdot \sin\alpha} \end{cases} \qquad (2)$$

Se observă că, de asemenea: $\boldsymbol{a_x^2 + a_y^2 = a^2}$ (3)

Componentele rezultantei unui sistem de vectori.

Proiecțiile componentei unei sume de vectori sunt egale cu sumele proiecțiilor vectorilor componenți,



a) Fig. 5 b)

Fig. 5a):

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{c}}_x = \vec{\boldsymbol{a}}_x + \vec{\boldsymbol{b}}_x \\ \vec{\boldsymbol{c}}_x = \vec{\boldsymbol{a}}_x + \vec{\boldsymbol{b}}_x \end{cases} \qquad (4)$$

Analog, în cazul diferenței: proiecțiile componentei unei diferențe de vectori sunt egale cu diferențele proiecțiilor vectorilor componenți, Fig. 5b):

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{d}}_x = \vec{\boldsymbol{a}}_x - \vec{\boldsymbol{b}}_x \\ \vec{\boldsymbol{d}}_x = \vec{\boldsymbol{a}}_x - \vec{\boldsymbol{b}}_x \end{cases} \qquad (5)$$

2. Înmulțirea vectorilor. Cu vectorii ce pot face două feluri de înmulțire:
- înmulțire scalară, sau produs scalar, al cărui rezultat este un scalar și
- înmulțire vectorială, sau produs vectorial, al cărui rezultat este un vector.

Produsul scalar a doi vectori.

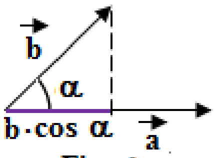


Fig. 6

Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori oarecare care fac unghiul α între ei, Fig. 6.

Se numește produs scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ produsul modulelor celor doi vectori și cosinusul unghiului dintre ei:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha \qquad (6)$$

Se observă că produsul scalar a doi vectori este produsul dintre modulul unui vector și modulul proiecției celui de-al doilea vector pe primul.

Proprietăți ale produsului scalar.

a) Exceptând cazul banal, când modulul unui vectori este zero, produsul scalar a doi vectori este zero dacă vectorii sunt perpendiculari, ($\cos 90^0 = 0$).

b) Produsul scalar este maxim atunci când vectorii sunt paraleli, coliniari, ($\cos 0^0 = 1$).

c) Produsul scalar al unui vector cu el însuși este egal cu pătratul modului său:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \qquad \text{sau} \qquad a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \qquad (7)$$

De aici rezultă o consecință interesantă. Dacă $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ atunci, conform rel. (8) $c^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2$, sau

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b \cdot \cos\alpha \qquad (8)$$

Evident, în cazul diferenței vectorilor, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, $d^2 = \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2$, sau

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\alpha \qquad (8')$$

Rel. (8) și (8') sunt expresii ale **relației analitice de compunere a doi vectori**. *În matematică sunt cunoscute sub numele de teorema lui Pitagora generalizată.*

d) Din rel. (6) rezultă că produsul scalar a doi vectori este comutativ, pentru că produsul scalar a doi scalari este comutativ.

e) Produsul scalar este distributiv față de adunare:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \qquad (9)$$

Produsul vectorial.

Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori oarecare care fac unghiul α între ei, Fig. 7.

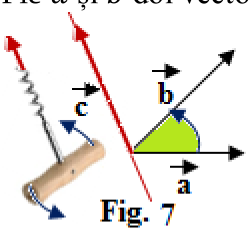


Fig. 7

Se numește produs vectorial a doi vectori, notat $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, produsul modulelor vectorilor și sinusul unghiului dintre ei, $c = |\vec{c}| = a \cdot b \cdot \sin\alpha$ (10)

Direcția vectorului produs vectorial, $\vec{c}$, este perpendiculară pe planul determinat de cei doi vectori, în punctul lor de concurență, O. Sensul vectorului se determină cu regula burghiului, Fig. 7.

Regula burghiului, (a șurubului, sau a tirbușonului). Se așează burghiul paralel cu direcția vectorului și se rotește astfel încât să se suprapună primul vector peste cel de-al doilea pe drumul cel mai scurt, Fig. 7. Sensul de înaintare al burghiului este sensul vectorului.

Proprietăți ale produsului vectorial.

a) Produsul vectorial este anticomutativ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (11)

b) Produsul vectorial este distributiv față de adunare:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \qquad (12)$$

Înmulțirea unui vector cu un scalar.

Înmulțirea unui vector cu un scalar este de fapt o adunare a unui vector cu el însuși de un număr de ori:

$$\vec{c} = k \cdot \vec{a} \qquad (13)$$

Se observă că vectorul $\vec{c}$ este un vector care are aceeași direcție și sens cu vectorul $\vec{a}$, dar modulul este de k ori mai mare.

BIBLIOGRAFIE

A. Hristev, V. Fălie, D. Manda – Fizică, manual pentru clasa a IX-a, EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI, 1984