MECANICA

V. LEGI DE CONSERVARE. APLICAȚII.

Introducere.

Sistemul fizic este un corp macroscopic sau un ansamblu de corpuri macroscopice. Corpurile care alcătuiesc sistemul se numesc **elemente ale sistemului**.

Tot ceea ce nu aparține sistemului se numește **mediu exterior**.

Corpurile, care alcătuiesc sistemul, interacționează atât între ele cât și cu cele din mediul exterior.

Aceste interacțiuni au ca efect modificarea stării sistemului, sau altfel spus: în sistem apar o serie de procese.

Forțele care se manifestă între elementele sistemului se numesc **forțe interne.**

Forțele care se manifestă între corpurile din sistem și cele din mediul exterior se numesc **forțe externe**, sau **forțe exterioare sistemului**.

Un sistem este izolat (sau închis) dacă asupra lui nu acționează forțe externe.

Un sistem este neizolat (sau deschis) dacă asupra lui acționează forțe externe.

Dacă forțele externe ce acționează asupra sistemului sunt foarte mici, neglijabile, în comparație cu forțele interne, sistemul poate fi considerat izolat. Exemplu de sisteme izolate: sistemul corp-resort, sau sistemul corp-Pământ, pentru care forța de frecare este considerată neglijabilă.

În orice sistem, în care se desfășoară procese fizice, se produce variația mărimilor fizice caracteristice. Aceste variații nu sunt independente, deoarece mărimile fizice ce caracterizează sistemul sunt legate prin legi fizice.

Legile de conservare sunt legi fizice potrivit cărora, valorile unor mărimi fizice, caracteristice sistemelor izolate, rămân neschimbate pe parcursul desfășurării oricărui proces.

Stabilirea legilor de conservare are o importanță fundamentală pentru fizică, deoarece permit evaluarea sistemelor izolate, în condițiile în care utilizarea metodelor cinematice sau dinamice este foarte complicată sau chiar imposibilă.

1. Conservarea energiei mecanice.

Am arătat că, în procesele mecanice: $\Delta E_c = L$ și $\Delta E_p = -L$, vezi MECANICA. Lucrul mecanic. randamentul. puterea. energia mecanică., pag. 4, rel. (24) și (25').

Dacă adunăm cele două relații membru cu membru, obținem:

$$\boldsymbol{\Delta E_c + \Delta E_p = 0} \textbf{ sau: } \boldsymbol{E = E_c + E_p = E_{c0} + E_{p0} = E_{cmax.} = E_{pmax.} = const.} \quad (1)$$

Această relație exprimă **legea conservării și transformării energiei mecanice**:

În procesele mecanice, energia cinetică se transformă în energie potențială și invers, suma lor la orice moment de timp fiind constantă.

2. Impulsul mecanic. Conservarea impulsului mecanic.

a) Cazul punctului material izolat.

Conform principiului al II-lea al dinamicii $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Această relație, pentru un sistem de forțe oarecare, se mai poate scrie:

$$\boldsymbol{\vec{F}_m = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m \cdot \vec{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}} \quad (2)$$

Unde cu $\vec{F}_m$ am notat forța medie care acționează asupra sistemului, iar produsul $\boldsymbol{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$ se numește **impulsul punctului material**.

Facem notația: $$\boldsymbol{\vec{H} = \vec{F}_m \cdot \Delta t = \Delta \vec{p}} \quad (3)$$

$\vec{H}$ se numește impulsul forței, iar rel. (3) exprimă **teorema de variație a impulsului punctului material**:

Variația impulsului punctului material, într-un interval de timp, este egală cu impulsul forței exterioare aplicate punctului material, în intervalul de timp considerat.

Din rel. (3) observăm și unitatea de măsură pentru impuls: $[p]_{SI} = 1N \cdot s$

Dacă punctul material este izolat, conform rel.(3): $\Delta\vec{p} = \mathbf{0}; sau\ \vec{p} = \boldsymbol{const.}$, adică punctul material izolat se mișcă rectiliniu și uniform, sau se află în repaus, $\vec{\mathbf{v}} = \boldsymbol{const.}$, valabil în sistemele de referință inerțiale. Sau altfel spus: **impulsul punctului material izolat se conservă.** Acest rezultat reprezintă o altă formă de exprimare a principiului I al dinamicii.

În procesele de interacțiune dintre corpuri, prin intermediul forțelor, se realizează un transfer de mișcare de la un corp la altul, măsurat prin transferul de impuls și energie cinetică, exprimate prin cele două teoreme de variație: **a) teorema de variație a energiei cinetice** și

b) teorema de variație a impulsului punctului material.

Din cele afirmate până acum, constatăm că **impulsul este o măsură a mișcării mecanice**, fapt pentru care se mai numește și **cantitate de mișcare**.

b) Cazul unui sistem de două puncte materiale, Fig. 1.

$\vec{F}_{12}$ **și** $\vec{F}_{21}$ sunt forțe interne, iar $\vec{F}_1$ **și** $\vec{F}_2$ sunt forțe externe. Pentru sistemul din Fig. 1 vom scrie principiul al II-lea al dinamicii:

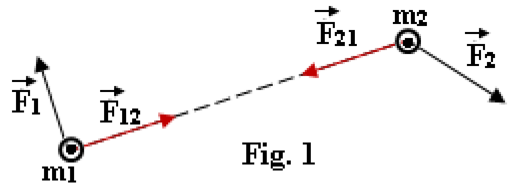

Fig. 1

$$\Delta\vec{p}_1 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) \cdot \Delta t \ \text{ și } \ \Delta\vec{p}_2 = (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) \cdot \Delta t \qquad (4)$$

Adunăm cele două rel. (4) și ținem cont că suma forțelor interne este totdeauna egală cu zero, conform principiului al III-lea al dinamicii: $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$.

Facem, de asemenea, notațiile: $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, numit impulsul total și $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, numită rezultanta forțelor exterioare. Astfel spus, putem scrie:

$$\Delta\vec{P} = \vec{F} \cdot \Delta t \qquad (5)$$

Adică: **variația impulsului total este egală cu impulsul rezultantei forțelor externe, care acționează asupra sistemului.** Dacă rezultanta forțelor externe este egală cu zero: $\vec{F} = 0$, impulsul total se conservă:

$$\Delta\vec{P} = \mathbf{0} \ \text{ sau } \ \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \boldsymbol{const.} \qquad (6)$$

Acest lucru se mai poate scrie:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \qquad (6')$$

3. Momentul cinetic. Conservarea momentului cinetic.

3.1 Momentul cinetic. Mărimile fizice care caracterizează mișcarea de translație sunt **forța** și **impulsul**. În mișcarea circulară mărimile fizice caracteristice sunt **momentul forței** și **momentul impulsului**, numit și **momentul cinetic**.

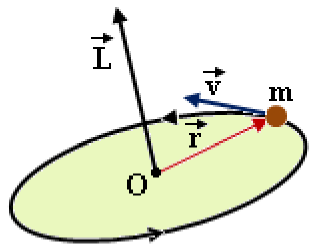

Fig. 2

Momentul cinetic, notat $\vec{L}$, este definit ca produsul vectorial dintre vectorul $\vec{r}$ și vectorul $\vec{p}$, impulsul punctului material:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (7)$$

Momentul cinetic este un vector perpendicular pe planul traiectoriei, în centrul de curbură, Fig. 2. Sensul vectorului se află cu regula burghiului, vezi Noțiuni de calcul vectorial, pag. 2.

Unitatea de măsură pentru momentul cinetic este: $[\mathbf{L}]_{SI} = \mathbf{1J \cdot s}$.

3.2. Conservarea momentului cinetic. Vom calcula variația momentului cinetic în raport cu timpul:

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{r} \times \vec{p})}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \qquad (8)$$

Am ținut cont de proprietatea de distributivitatea a produsului vectorial față de adunare și de faptul că produsul vectorial este anticomutativ.

În continuare, conform definițiilor stabilite în capitolele anterioare: $\vec{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ **și** $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Rezultă:

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \times \vec{p} = \mathbf{0} \qquad (9) \qquad \text{și} \qquad \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{M} \qquad (9')$$

Pentru rel. (9) am ținut cont de faptul că produsul vectorial dintre un vector și el însuși este totdeauna egal cu zero.

Teorema de variație a momentului cinetic:

Variația, în timp, a momentului cinetic al unui punct material, în raport cu un pol, este egală cu momentul rezultantei forțelor exterioare ce acționează asupra punctului material, în raport cu același pol, în același interval de timp, rel. (9').

Dacă rezultanta forțelor exterioare este zero, $\vec{F} = 0$, $\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = 0$. Rezultă $\Delta\vec{L} = 0$ sau $\vec{L} = const.$, adică, momentul cinetic se conservă.

Conservarea momentului cinetic are drept consecință conservarea planului în care se mișcă punctul material.

Această afirmație este deosebit de importantă în studiul mișcării corpurilor cerești. De exemplu: În cazul rotației Pământului în jurul Soarelui, momentul forței de interacțiune gravitațională (forța de greutate) este zero, ceea ce înseamnă că traiectoria Pământului este într-un plan. Evident, la fel și în cazul celorlalte planete!

La fel și în cazul electronului, care se mișcă pe o traiectorie circulară, plană, în jurul nucleului, deoarece momentul forței de interacțiune electrostatică dintre nucleu și electron este zero.

4. *Centrul de masă (CM) al unui sistem de două particule. (Temă facultativă.)

Centrul de masă, al unui sistem de două particule, este un punct situat pe dreapta ce unește centrele celor două particule, între cele două particule, mai aproape de particula cu masa mai mare și are o serie de proprietăți remarcabile, Fig. 3. Între masele celor două particule și distanța până la CM există relația: $$m_1 \cdot d_1 = m_2 \cdot d_2 \qquad (10)$$

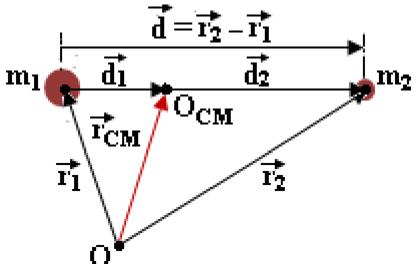

Fig. 3

a) Coordonatele centrului de masă.

Din Fig. 3, din considerente vectoriale și identificând egalitățile respective, observăm că: $$d = d_1 + d_2 \qquad (11)$$

Din rel. (10) și (11) rezultă:

$$d_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d \qquad (12)$$

În Fig. 3 identificăm: $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ și $\vec{r}_{CM} = \vec{r}_1 + \vec{d}_1$ (13)

Dacă înlocuim rel. (13) în rel. (12) obținem:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad (14)$$

Sau, pe componente:

$$\begin{cases} \vec{x}_{CM} = \dfrac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{y}_{CM} = \dfrac{m_1\vec{y}_1 + m_2\vec{y}_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \qquad (14')$$

b) Impulsul centrului de masă.

Pentru rel.(14), vom considera o variație a timpului Δt și avem în vedere că $m = m_1 + m_2$ este masa sistemului:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \qquad (15)$$

sau: $$m \cdot \vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P} \qquad (15')$$

Adică:

Impulsul total al sistemului este egal cu masa sistemului înmulțită cu viteza centrului de masă.

c) Accelerația centrului de masă.

Pentru rel.(15), vom considera, în continuare, o variație Δt.

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1 + m_2} \qquad (16)$$

sau: $$m \cdot \vec{a}_{CM} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F} \qquad (16')$$

Adică:

Rezultanta forțelor externe, care acționează asupra sistemului, este egală cu produsul dintre masa sistemului și accelerația centrului de masă.

Determinarea CM și a coordonatelor CM simplifică studiul sistemelor fizice. În loc să studiem tot sistemul, componentă cu componentă, vom studia doar comportarea CM, considerând că tot sistemul are masa concentrată într-un singur punct, CM, care înglobează în el toate caracteristicile sistemului.

Dacă sistemul este izolat, sau rezultanta forțelor externe este nulă, centrul de masă va fi în repaus sau în mișcare rectilinie uniformă.

Evident că toate aceste considerații, făcute până acum, se pot generaliza pentru un sistem de **n** puncte materiale.

APLICAȚII.

5. Ciocniri.

Ciocnirile sunt procese de interacțiune dintre două corpuri, care durează un timp foarte scurt. Aceste procese sunt succedate de procese de deformare și de încălzire a corpurilor, cu condiția respectării legilor de conservare.

Foarte multe procese din natură sunt explicate ca procese de ciocnire. De exemplu ionizarea atomului, studiul mișcării corpurilor cu masă variabilă (rachetele), explozia unui proiectil, studiul gazelor, încărcarea și descărcarea unui camion de marfă, și așa mai departe…

5.1 Ciocnirea plastică (sau total neelastică).

Particulele de mase $\mathbf{m_1}$ și $\mathbf{m_2}$ se deplasează cu vitezele $\vec{\mathbf{v}}_1$ *și* $\vec{\mathbf{v}}_2$, se vor ciocni. În Fig. 4 a) și b) am schițat etapele ciocnirii plastice. *În continuare, pentru simplificarea calculelor matematice, voi face considerațiile pentru o mișcare unidirecțională.* Ca urmare a interacțiunii, corpurile se deformează, se unesc, formând un corp de masă $\boldsymbol{m_1} + \boldsymbol{m_2}$, iar sistemul va rămâne deformat. Energia cinetică a celor două corpuri s-a transformat în energie potențială de deformare. În etapa imediat următoare, energia potențială de deformare se retransformă în energie cinetică, dar nu integral! O parte din energia potențială de deformare se va transforma în căldură și se va disipa…De exemplu: baterea unui cui într-o scândură este un proces de ciocnire plastică. Dacă, după ce ați terminat operațiunea, puneți mâna pe ciocan, veți observa că aceste s-a încălzit. Tot acest proces se desfășoară cu respectarea legilor de conservare: legea conservării energiei și legea conservării impulsului. Am obținut, astfel, un sistem de două ecuații cu două necunoscute:

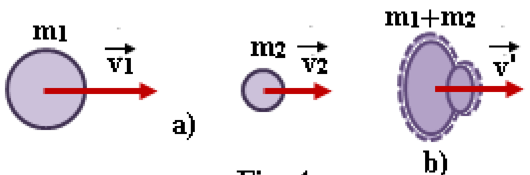

Fig. 4

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{m_1} \cdot \mathbf{v}_1^2}{\mathbf{2}} + \dfrac{\boldsymbol{m_2} \cdot \mathbf{v}_2^2}{\mathbf{2}} = \dfrac{(\boldsymbol{m_1} + \boldsymbol{m_2}) \cdot \mathbf{v}'^2}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{m_1} \cdot \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{m_2} \cdot \mathbf{v}_2 = (\boldsymbol{m_1} + \boldsymbol{m_2}) \cdot \mathbf{v}' \end{cases} \qquad (17)$$

necunoscutele sunt **v'** și $\boldsymbol{Q} = -\Delta \boldsymbol{E_c}$, pierderea de energie cinetică sub formă de căldură.

Din a doua ecuație, legea conservării impulsului, rezultă viteza **v'** după ciocnire:

$$\mathbf{v}' = \frac{\boldsymbol{m_1} \cdot \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{m_2} \cdot \mathbf{v}_2}{\boldsymbol{m_1} + \boldsymbol{m_2}} \qquad (18)$$

Dacă introducem valoarea lui v' în a doua ecuație, legea conservării energiei și facem calculele matematice, obținem valoarea pierderii de energie cinetică sub formă de căldură:

$$\mathbf{Q} = -\Delta \boldsymbol{E_c} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\boldsymbol{m_1} \cdot \boldsymbol{m_2}}{\boldsymbol{m_1} + \boldsymbol{m_2}} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 \qquad (19)$$

În continuare vom face două notații:

$$\boldsymbol{m_r} = \frac{\boldsymbol{m_1} \cdot \boldsymbol{m_2}}{\boldsymbol{m_1} + \boldsymbol{m_2}} \qquad (20)$$

numită **masă redusă** și:

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \qquad (21)$$

numită **viteză relativă.**

Cu aceste notații, rel. (19) se poate scrie:

$$\mathbf{Q} = -\Delta \boldsymbol{E_c} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{m_r} \cdot \mathbf{v}_r{}^2 \qquad (22)$$

Rel. (22) exprimă faptul că, în urma ciocnirii plastice și a cuplării particulelor, **energia cinetică relativă** a unei particule față de cealaltă se pierde, transformându-se în altă formă de energie, de exemplu în căldură.

5.2 Ciocnirea perfect elastică.

Particulele de mase $\mathbf{m_1}$ și $\mathbf{m_2}$ se deplasează cu vitezele $\vec{\mathbf{v}}_1$ *și* $\vec{\mathbf{v}}_2$, se vor ciocni. În Fig. 4 a), b) și c) am schițat etapele ciocnirii perfect elastice. *În continuare, pentru simplificarea calculelor matematice, voi face considerațiile, ca și în cazul ciocnirii plastica, pentru o mișcare unidirecțională.* Ca urmare a interacțiunii, corpurile se deformează, se unesc, formând un corp de masă $\boldsymbol{m_1+m_2}$, dar sistemul nu va rămâne deformat. Deformațiile corpurilor dispar după ciocnire, iar energia cinetică relativă, transformată în energie potențială de deformare elastică, se restituie integral sistemului, celor două particule, după ciocnire.

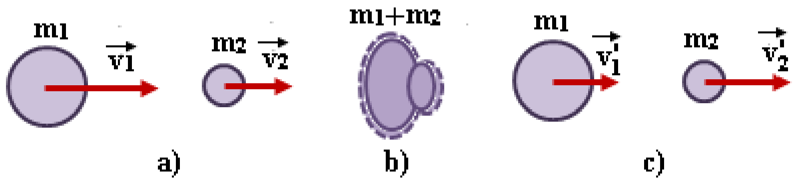

Fig. 5

Pentru acest sistem, voi scrie legile de conservare, a energiei și impulsului. Obținem un sistem de două ecuații, cu două necunoscute, $\mathbf{v'_1}$ și $\mathbf{v'_2}$.

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 \cdot v_1'^2}{2} + \dfrac{m_2 \cdot v_2'^2}{2} \\ m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2 \end{cases} \qquad (23)$$

Prima ecuație a rel. (23) o înmulțim cu 2 și apoi, în ambele ecuații, facem separarea termenilor în funcție de indice, după cum urmează:

$$\begin{cases} m_1 \cdot v_1^2 - m_1 \cdot v_1'^2 = m_2 \cdot v_2'^2 - m_1 \cdot v_2^2 \\ m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot v_1' = m_2 \cdot v_2' - m_2 \cdot v_2 \end{cases} \qquad (23')$$

sau, folosind formulele de calcul prescurtat din matematică, se mai poate scrie:

$$\begin{cases} m_1 \cdot (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2 \cdot (v_2 - v_2')(v_2 + v_2') \\ m_1 \cdot (v_1 - v_1') = m_1 \cdot (v'_2 - v_2) \end{cases} \qquad (23'')$$

Dacă, în rel. (23''), împărțim prima ecuație la cea de-a doua obținem: $\mathbf{v_1 + v_1' = v'_2 + v_2}$

sau $$\mathbf{v_1 - v_2 = -(v_1' - v_2')} \qquad (24)$$

Observăm că: $\mathbf{v_r = v_1 - v_2}$ este viteaza relativă a particulei 1 față de particula 2 înainte de ciocnire, iar $\mathbf{v_r' = v_1' - v_2'}$ este viteaza relativă a particulei 1 față de particula 2 după de ciocnire.

Cu aceste observații, rel. (24) se poate scrie:

$$\mathbf{v_r = -v_r'} \qquad (24')$$

Adică, viteaza relativă a particulei 1 față de particula 2 înainte de ciocnire este egală și de sens contrar cu viteaza relativă a particulei 1 față de particula 2 după ciocnire.

Pentru a afla vitezele $\mathbf{v_1'}$ și $\mathbf{v_2'}$ revenim la rel.(23''), după împărțirea celor două ecuații:

$$\begin{cases} v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \\ m_1 \cdot (v_1 - v_1') = m_1 \cdot (v'_2 - v_2) \end{cases} \qquad (23''')$$

Observați că sistemul de ecuații s-a simplificat considerabil. Rezolvând sistemul de ecuații, obținem expresiile celor două viteze:

$$\begin{cases} v_1' = 2 \cdot \dfrac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} - v_1 \\ v_2' = 2 \cdot \dfrac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} - v_2 \end{cases} \qquad (25)$$

Observați *că formulele sunt foarte ușor de reținut. Viteza după ciocnire este de două ori viteza unei ciocniri plastice minus viteza inițială a corpului!*

DISCUȚIE:

a) Dacă masele celor două particule sunt egale, $\boldsymbol{m_1 = m_2 = m}$, efectuând calculele, obținem pentru vitezele v_1' și v_2' valorile:

$$\begin{cases} v_1' = v_2 \\ v_2' = v_1 \end{cases} \qquad (25')$$

spunem că particulele fac schimb de viteze.

b) Dacă unul din corpuri este în repaus, de exemplu particula 2, $\mathbf{v_2' = 0}$, efectuând calculele, obținem pentru vitezele v_1' și v_2' valorile:

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \\ v_2' = \dfrac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \end{cases} \qquad (25'')$$

Observăm că, în acest caz, sensul lui v_1' depinde de semnul diferenței $m_1 - m_2$.

c) **Ciocnirea cu un perete.** Dacă unul dintre corpuri are masa foarte mare, mult mai mare decât a celuilalt, de exemplu: $m_2 \gg m_1$. În acest caz corpul de masă m_2 poate fi asemănat cu un perete. Acest caz particular de ciocnire se numește **ciocnire cu un perete**. Această situație se produce atunci când lovim cu mingea un perete, când mingea lovește suprafața unui teren, cazul unei molecule care lovește peretele vasului, sau pistonul cilindrului în care se află, și așa mai departe…

În rel. (25), dăm factor comun forțat m_2 și ținem cont că dacă $m_2 \gg m_1$, atunci: $\dfrac{m_1}{m_2} \to 0$.

$$\begin{cases} v_1' = 2 \cdot \dfrac{m_2\left(\frac{m_1}{m_2} \cdot v_1 + v_2\right)}{m_2\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)} - v_1 \\ v_2' = 2 \cdot \dfrac{m_2\left(\frac{m_1}{m_2} \cdot v_1 + v_2\right)}{m_2\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)} - v_2 \end{cases} \qquad (26)$$

Efectuând calculele obținem:

$$\begin{cases} v_1' = 2 \cdot v_2 - v_1 \\ v_2' = v_2 \end{cases} \qquad (26')$$

Observați că, în urma ciocnirii dintre corp și perete, peretele nu-și modifică viteza. Dacă peretele este în repaus, $\mathbf{v_2 = 0}$:

$$\begin{cases} v_1' = -v_1 \\ v_2' = 0 \end{cases} \qquad (26'')$$

ACTIVITĂȚI DE FIXARE A CUNOȘTINȚELOR ȘI EVALUARE.

Probleme rezolvate și comentate:

1. Se dă drumul unui corp să lunece pe un jgheab înclinat, continuat cu o buclă verticală de rază R, din punctul A, de la înălțimea minimă de la care corpul nu părăsește suprafața buclei, Fig. 6. Să se determine înălțimea h_{min} de la care este lăsat să lunece corpul, pentru a parcurge continuu bucla. (Se neglijează frecările.)

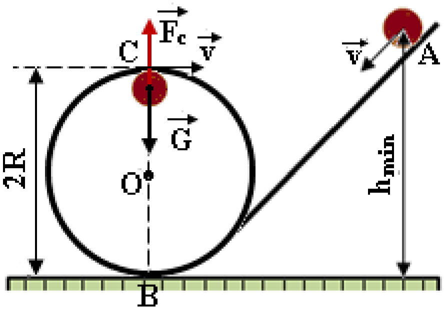

Fig. 6

Rezolvare: $F_f = 0$, și deci putem aplica legea conservării energiei.

Conform legii conservării energiei: energia totală din punctul A trebuie să fie egală cu energia totală din punctul C. În punctul A corpul are numai energie potențială gravitațională, iar în punctul C corpul are și energie cinetică și energie potențială.

De asemenea, când ajunge în punctul C, corpul trebuie să aibă o asemenea viteză astfel încât forța centrifugă F_c, să fie cel puțin egală cu forța de greutate G, $F_c = G$. Această condiție, numită condiția de echilibru, este impusă de cerința problemei, ca $h = h_{min.}$. Pentru $h > h_{min.}$, evident $F_c > G$.

Rezolvarea matematică a problemei. Vom scrie cele două ecuații:

$$\begin{cases} mgh_{min.} = \dfrac{mv^2}{2} + mg \cdot 2R \\ \dfrac{mv^2}{R} = mg \end{cases} \qquad (27)$$

Din condiția de echilibru rezultă $\mathbf{v^2} = \boldsymbol{Rg}$, care introdus în legea conservării energiei și efectuând calculele matematice rezultă:

$$\boldsymbol{h_{min.}} = \frac{5}{2} \cdot \boldsymbol{R} \qquad (28)$$

2. De pe vârful unei sfere fixe, netede (fără frecări), de rază R = 3,00 m, alunecă liber, în jos, un corp mic, Fig. 7. Să se determine la ce înălțime minimă de vârful sferei se va desprinde.

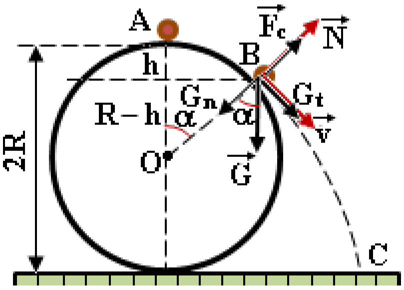

Fig. 7

Rezolvare: Identificăm, întâi, datele cunoscute ascunse:
1. Corpul se mișcă fără frecări, deci în sistem nu acționează forțe conservative și, în consecință, vom putea aplica legea conservării energiei. În acest sens, vom alege nivelul de energie potențială gravitațională zero nivelul punctului B, punct în care presupunem că se deprinde corpul de sferă. Altfel spus, energia potențială gravitațională a corpului, în punctul B, este zero. Această condiție ne va simplifica foarte mult rezolvare problemei!
2. Corpul se va desprinde de sferă, într-un punct B, atunci când forța de apăsare normală este cel puțin egală cu zero, $\vec{N} = 0$, numită și condiția de echilibru.

În Fig. 7 am reprezentat toate forțele care acționează asupra sistemului. Vom scrie cele două ecuații:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E_A = E_B} \\ \boldsymbol{F_c = G_n} \end{cases} \qquad (29)$$

Sau, observând desenul, Fig. 7:

$$\begin{cases} \boldsymbol{mgh} = \dfrac{\boldsymbol{m}\mathbf{v^2}}{\mathbf{2}} \\ \dfrac{\boldsymbol{m}\mathbf{v^2}}{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{mg \cdot cos\alpha} \end{cases} \qquad (29')$$

Din Fig. 7 observăm că:

$$\boldsymbol{cos\alpha} = \frac{\boldsymbol{R - h}}{\boldsymbol{R}} \qquad (30)$$

Din condiția de echilibru rezultă $\mathbf{v^2} = \boldsymbol{Rg \cdot cos\alpha}$, care introdusă în legea conservării energiei și efectuând calculele matematice rezultă:

$$\boldsymbol{h} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \cdot \boldsymbol{R} = \mathbf{1}\boldsymbol{m} \qquad (31)$$

3. Într-o barcă, de masă M = 70kg, aflată în repaus, stau la extremități doi pescari de mase m_1 = 60kg, respectiv m_2 = 70kg, la distanța d = 6,0m, unul de altul. Pescarii își schimbă locurile, Fig. 8. Cu cât se va deplasa barca?

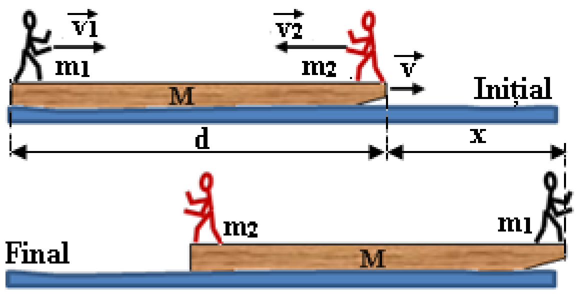

Fig. 8

Rezolvare: Deoarece pe direcția de mișcare nu avem forțe, mișcările pescarilor și a bărcii vor mi mișcări uniforme.

Când încep să se deplaseze, pescarii creează mișcare, deci impuls, care va fi cedat bărcii cu pescarii în ea. În mod arbitrar, am ales sensul de mișcare al bărcii de la stânga la dreapta, ca în desen. Nu putem să spunem de la început în ce sens se va mișca barca, de la stânga la dreapta, sau de la dreapta le stânga. Acest lucru vom putea să-l confirmăm numai după ce vom fi rezolvat problema. Dacă obținem pentru x o valoare pozitivă înseamnă că am ales bine sensul de mișcare. Dacă obținem pentru x o valoare negativă înseamnă că am ales invers sensul de mișcare.

Deoarece mișcarea este unidirecțională, vom scrie legea conservării impulsului pe direcția de mișcare, conform desenului. Deci:

$$\boldsymbol{m_1}\mathbf{v_1} - \boldsymbol{m_2}\mathbf{v_2} = (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{m_1} + \boldsymbol{m_2})\mathbf{v} \qquad (32)$$

Dar:

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{v_2} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{t}} \text{ și } \mathbf{v} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{t}} \qquad (33)$$

Dacă introducem valorile literale ale lui v_1, v_2 și v în ecuația (33) vom obține:

$$x = \frac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2} \cdot d \qquad (34)$$

Introducând datele numerice, vom obține pentru x valoarea $\boldsymbol{x = -0,30m}$.

Interpretarea rezultatului. Valoarea negativă a lui x ne confirmă faptul că am ales invers sensul de mișcare al bărcii. Deci, în condițiile numerice date, barca se mișcă de la dreapta la stânga.

OBSERVAȚIE: Dacă facem corect interpretarea rezultatului, rezultatul obținut este corect și nu mai trebuie făcută nici o altă corecție!

4. Un obuz de masă M = 70kg zboară cu viteza v = 300m/s. La un moment dat explodează în două fragmente, Fig. 9. Unul dintre ele, de masă m_1 = 30kgcontinuăsă se miște înainte cu viteza v_1 = 500m/s. Să se determine: a) viteza v_2 a celui de-al doilea fragment; b) Câtă energie cinetică , $Q = +\Delta E_c$, se creează?

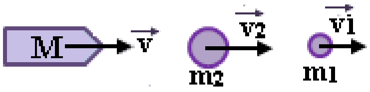

Fig. 9

Rezolvare: Fenomenul îl vom aborda ca un fenomen de ciocnire plastică! Derulați filmul invers și veți vedea cum două bucăți de obuz se ciocnesc, se unesc și formează un obuz…Vom scrie legea de conservare a energiei și a impulsului, dar pentru fenomenul direct:

$$\begin{cases} \dfrac{M \cdot v^2}{2} = \dfrac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \dfrac{(M - m_1) \cdot v_2^2}{2} - Q \\ M \cdot v = m_1 \cdot v_1 + (M - m_1) \cdot v_2 \end{cases} \qquad (35)$$

Semnul minus din fața lui Q este în conformitate cu o convenție pe care am făcut-o în legătură cu căldura: Q>0 dacă este căldură primită de sistem și Q<0 dacă este cedată de sistem. În cazul nostru, prin explozie, obuzul va degaja foarte multă căldură.

Din legea conservării impulsului rezultă viteza $\mathbf{v_2}$:

$$v_2 = \frac{M \cdot v - m_1 \cdot v_1}{M + m_1} = 150m/s \qquad (36)$$

Pentru a exprima valoarea lui $\boldsymbol{-Q = +\Delta E_c}$, avem în vedere rel. (19) și (22):

$$-Q = \Delta E_c = \frac{1}{2} m_r \cdot v_r^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1(M - m_1)}{M} \cdot (v_1 - v_2)^2 = 1,05MJ \qquad (37)$$

5. Pe o masă netedă, fără frecări, o bilă de masă m_1 lovește o altă bilă de masă m_2, aflată în repaus, Fig.10. Pentru ce raport al maselor, după ciocnirea perfect elastică, unidimensională, a bilelor, acestea se vor depărta cu viteze egale în modul și opuse ca semn?

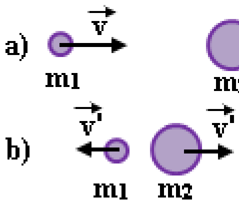

Fig. 10

Rezolvare: Vom scrie legile de conservare, a energiei și impulsului, cu date le problemei:

$\mathbf{v_1 = v, v_2 = 0}$ **și** $\mathbf{v_1' = -v_2' = v'}$**,** de asemenea vom construi raportul $\dfrac{m_2}{m_1}$

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 \cdot v^2}{2} = \dfrac{m_1 \cdot v'^2}{2} + \dfrac{m_2 \cdot v'^2}{2} \\ m_1 \cdot v = -m_1 \cdot v' + m_2 \cdot v' \end{cases} \qquad (38)$$

Rel. (38) se mai poate scrie:

$$\begin{cases} m_1 \cdot v^2 = m_1 \cdot v'^2 (\dfrac{m_2}{m_1} + 1) \\ m_1 \cdot v = m_1 \cdot v' (\dfrac{m_2}{m_1} - 1) \end{cases} \qquad (38')$$

Facem simplificarea lui m_1, substituim valoarea lui v din ecuația care exprimă legea conservării impulsului în ecuația care exprimă legea conservării energiei, facem simplificările și calculele matematice, vom obține:

$$\frac{m_2}{m_1} = 3 \qquad (39)$$

6. Două bile de mase m_1 = 0,173 kg și m_2 = 0,200 kg se mișcă pe direcții perpendiculare cu vitezele v_1 = 10 m/s, respectiv v_2 = 5 m/s. După ciocnire bila m_2 se oprește. Care va fi viteza primei bile după ciocnire?

Rezolvare: Am ales și această problemă deoarece vreau să vă atrag atenție asupra faptului că impulsul este o mărime vectorială și deci ecuația legii conservării impulsului trebuie să fie o relație vectorială. Până acum această relație am scris-o scalar, deoarece mișcările pe care le-am considerat erau considerate unidirecționale. În cazul de față, mișcarea este în plan și trebuie să avem în vedere scrierea legii de conservare a impulsului pe componente.

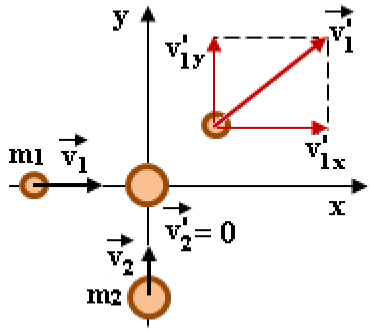

Fig. 11

Vectorial, legea conservării impulsului se scrie:

$$\boldsymbol{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v'}_1 + m_2 \cdot \vec{v'}_2} \qquad (40)$$

Această relație se va scrie, pe componente, Fig. 11:

$$\begin{cases} \boldsymbol{m_1 \cdot v_1 = m_1 \cdot v'_{1x}} \\ \boldsymbol{m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v'_{1y}} \end{cases} \qquad (41)$$

Din Fig. 11 se observă că $\mathbf{v'_1} = \sqrt{v'^2_{1x} + v'^2_{1y}}$. Exprimând $\mathbf{v'_{1x}}$ și $\mathbf{v'_{1y}}$ din rel. (41) rezultă:

$$\mathbf{v'_1} = \frac{\sqrt{m_1^2 \cdot v_1^2 + m_2^2 \cdot v_2^2}}{m_1} = \mathbf{11{,}5\,m/s} \qquad (42)$$

Răspundeți următorilor itemi:

1. Ce este un sistem fizic?
2. Ce înțelegeți prin mediul exterior?
3. Ce sunt forțele interne?
4. Ce sunt forțele externe?
5. Prin ce se caracterizează un sistem izolat (sau închis)?
6. Prin ce se caracterizează un sistem neizolat (sau deschis)?
7. Enunțați teorema de variație a energiei cinetice.
8. Ce sunt legile de conservare? Dați exemple.
9. Legea conservării energiei.
10. Impulsul punctului material. Definiție, formulă, simbol, unitate de măsură.
11. Teorema de variație a impulsului punctului material.
12. Legea conservării impulsului punctului material.
13. Momentul cinetic. Definiție, formulă, simbol, unitate de măsură.
14. Teorema de variație a momentului cinetic.
15. Legea conservării momentului cinetic.
16. Justificați că traiectoria Pământului în jurul Soarelui, sau a electronului în jurul nucleului, este într-un plan.
17. Centrul de masă.
18. Proprietățile centrului de masă.
19. Ciocniri. Definiție. Clasificare.
20. Dați exemple din natură care se pot fi explicate ca procese de ciocnire.

Rezolvați următoarele probleme:

1. Un corp de masă m = 1kg alunecă, pornind din repaus, pe un plan înclinat fix care formează unghiul $\alpha = 30^o$ cu orizontala, după care își continuă mișcarea pe un plan orizontal. Trecerea pe porțiunea orizontală se face lin, fără modificarea modulului vitezei. Pe planul înclinat mișcarea se face fără frecare, iar pe planul orizontal cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare fiind μ = 0,25 . Viteza corpului la baza planului înclinat este v = 25 m/s. Calculați: a) energia cinetică a corpului la baza planului înclinat; b) înălțimea de la care coboară corpul, măsurată față de planul orizontal;
c) valoarea maximă a energiei potențiale gravitaționale, considerând că energia potențială este nulă la baza planului orizontal; d) distanța parcursă de corp pe planul orizontal.

R: a) E_c = 312,5 J; b) h = 31,25 m; c) E_p = 312,5 J; d) x = 125 m

2. Un corp de masă m = 1kg, aflat inițial în repaus, alunecă fără frecare din vârful unui plan înclinat de unghi α = 30º și lungime l = 10 m, Fig. 12. Mișcarea se continuă cu frecare pe un plan orizontal, coeficientul de frecare fiind μ = 0,25. Trecerea pe porțiunea orizontală se face lin, fără modificarea modulului vitezei. După ce corpul parcurge distanța d = 10 m lovește un resort de constantă de constantă elastică k = 100 N/m, pe care îl comprimă și se oprește. Determinați: a) energia mecanică totală a corpului atunci când se afla în vârful planului înclinat (se consideră energia potențială gravitațională nulă la baza planului înclinat); b) energia cinetică a corpului la baza planului înclinat; c) viteza corpului imediat înainte ca acesta să atingă resortul; d) comprimarea maximă a resortului, neglijând frecarea pe timpul comprimării.

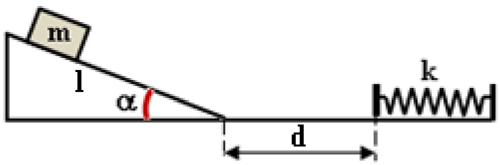

Fig. 12

R: a) E = 50 J; b) E_c = 50 J; c) $v = 5\sqrt{2}m/s$ = 7,07 m/s ; d) x= 0,71 m.

3. Un corp de masă m = 0,5 kg este lansat de la nivelul solului, vertical în sus, cu viteza inițială v = 8 m/s. Frecarea cu aerul se consideră neglijabilă. Energia potențială gravitațională este considerată nulă la nivelul solului. Determinați: a) înălțimea maximă atinsă de corp; b) viteza corpului în momentul în care energia sa cinetică este de trei ori mai mică decât cea potențială.

R: a) $h_{max.}$ = 3,2 m; b) v_1 = 4 m/s

4. Asupra unui corp, aflat inițial în repaus pe un plan orizontal pe care se poate mișca fără frecare, acționează pe direcție orizontală o forță constantă de valoare F = 4 N. După un timp Δt = 2s energia cinetică a corpului are valoarea E_c = 8 J. Calculați: a) distanta parcursă de corp în intervalul de timp Δt. b) viteza corpului la momentul t = 2 s. c) masa corpului. d) La momentul t = 2 s asupra corpului începe să acționeze o forță orizontală suplimentară, F_1. Din momentul aplicării forței și până la oprire corpul parcurge distanta D = 0,5 m. Determinați valoarea forței suplimentare.

R: a) d = 2 m; b) v = 2 m/s; c) m = 4 kg; d) F_1 = 20 N.

5. Un corp este lansat de la nivelul solului, vertical în sus. În graficul din Fig. 13 este redată dependența energiei cinetice a corpului de înălțimea la care se află. Se neglijează pierderile energetice datorate frecării cu aerul. Energia potențială gravitațională la nivelul solului este considerată nulă. Determinați: a) viteza cu care a fost lansat corpul de la suprafața pământului; b) masa corpului; c) lucrul mecanic efectuat de greutate de la momentul lansării până la momentul în care corpul atinge înălțimea maximă; d) înălțimea la care se află corpul în momentul în care valoarea vitezei acestuia este egală cu jumătate din valoarea vitezei cu care a fost lansat.

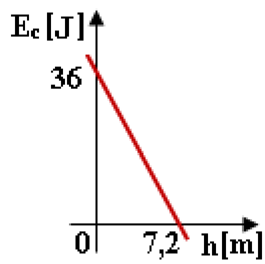

Fig. 13

R: a) v_0 = 12 m/s; b) m = 0,5 kg; c) L = -36 J; d) h = 5,4 m.

6. De la înălțimea h = 30 m față de sol este lansat, vertical în sus, cu viteza v_0 = 50 m/s. Se neglijează frecările cu aerul. Determinați: a) energia mecanică totală la momentul inițial, considerând că energia potențială gravitațională este nulă la nivelul solului; b) înălțimea maximă H la care ajunge corpul, măsurată față de sol; c) viteza corpului imediat înainte de a atinge solul; d) lucrul mecanic efectuat de forța de greutate asupra corpului pe toată durata mișcării acestuia.

R: a) E = 7750 J; b) H = 155 m; c) $v = 10\sqrt{31}m/s$ = 55,67 m/s; L_G = 1500 J.

7. Un corp cu masa cu mas m =2 kg este aruncat vertical în sus, de la înălțimea h = 30 cm față de sol, în câmpul gravitațional terestru. Frecările cu aerul se consideră neglijabile. Considerați nivelul solului ca nivel de referință pentru calculul energiei potențiale. Calculați: a) energia potențială gravitațională a sistemului corp-Pământ atunci când corpul se află la înălțimea h; b) viteza cu care a fost aruncat corpul, dacă acesta urcă până la o înălțime maximă H = 12,3 m față de sol; c) lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului din momentul aruncării sale și până la atingerea solului; d) înălțimea, față de sol, la care energia cinetică a corpului este egală cu energia sa potențială.

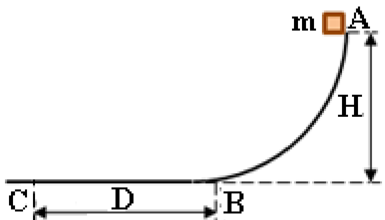

Fig. 14

R: a) E_p = 6 J; b) v_0 = 15,5 m/s; c) L_G = 6 J; h_1 = 6,15 m.

8. Un corp de masă m = 1 kg, aflat inițial în repaus la înălțimea

H = 5 m, este lăsat liber să alunece fără frecare pe o suprafață curbă AB, ca în Fig. 14. Începând din punctul B el își continuă mișcarea cu frecare pe planul orizontal, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0,2$. Energia potențială gravitațională se consideră nulă în punctul B. Determinați: a) viteza corpului în punctul B; b) lucrul mecanic efectuat de greutate la deplasarea corpului între punctele A și B; c) distanța parcursă de corp pe suprafața orizontală până când energia mecanică totală a acestuia devine egală cu un sfert din energia mecanică totală inițială; d. distanța parcursă de corp pe suprafața orizontală până la oprire.

R: a) v = 10 m/s; b) L_G = 50 J; c) d = 18,75 m; d) D = 25m.

9. De la înălțimea H = 10 m cade liber un corp de masă m = 2 kg, Fig. 15. La înălțimea h = 2 m față de sol corpul ciocnește un plan înclinat de lungime l = 4 m, de-a lungul căruia alunecă, fără să se desprindă de acesta. În urma ciocnirii, corpul pierde 75% din energia cinetică pe care o avea înainte de ciocnire. Forța de frecare cu aerul se neglijează, iar forța de frecare la alunecarea pe planul înclinat este F = 4 N. Energia potențială gravitațională se consideră nulă la baza planului înclinat. Determinați: a) energia mecanică totală a corpului aflat la înălțimea H ; b) energia cinetică a corpului imediat înainte de ciocnirea cu planul înclinat; c) energia mecanică totală a corpului la înălțimea h, imediat după ciocnirea acestuia cu planul înclinat; d) viteza corpului în punctul B.

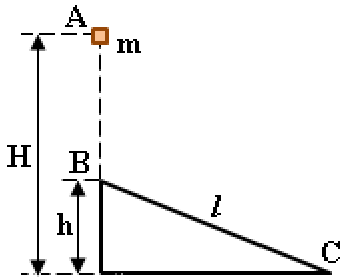

Fig. 15

R: a) E_A = 200 J; b) E_{CB} = 160 J; c) E_B = 8 J; d) v = 8 m/s.

10. Trei bărci merg una după alta cu viteza v fiecare. În fiecare barcă se află câte un om, astfel încât masa bărcii și a omului este M, iar în barca din mijloc mai există doi saci de masă m fiecare. Din barca din mijloc sun aruncați cei doi saci, unul spre barca din față, considerată barca 1, celălalt spre barca din spate, cu aceeași viteză relativă u față de barcă, înainte de aruncare. Care vor fi vitezele finale ale celor trei bărci, dacă sacii sunt aruncați: a) simultan; b) succesiv?

R: a) $v_1 = v + \frac{m}{M+m}\cdot u$; $v_2 = v$; $v_3 = v - \frac{m}{M+m}\cdot u$

b_1) Dacă este aruncat întâi sacul în barca din față:

$$v_1 = v + \frac{m}{M+m}\cdot u\,;\ v_2 = v + \frac{m^2}{M(M+m)}\cdot u\,;\ v_3 = v - \frac{m(M+2m)}{(M+m)^2}\cdot u$$

b_2) Dacă este aruncat întâi sacul în barca din spate:

$$v_1 = v + \frac{m(M+2m)}{(M+m)^2}\cdot u\,;\ v_2 = v + \frac{m^2}{M(M+m)}\cdot u\,;\ v_3 = v - \frac{m}{M+m}\cdot u$$

11. Un om aflat într-o barcă trage cu ajutorul unei sfori o a doua barcă cu o forță constantă F = 100 N. Masa primei bărci împreună cu omul este M = 100 kg, iar masa celei de-a doua bărci este m = 50 kg. Neglijând rezistența apei, să se afle vitezele bărcilor după timpul Δt = 2 s.

R: $v_1 = \frac{F\Delta t}{M} = 2{,}0\,m/s$; $v_2 = \frac{F\Delta t}{m} = 4{,}0\,m/s$. Vitezele vor fi de sens contrar!

12. O particulă de masă m_1 lovește o altă particulă de masă m_2, aflată în repaus. Să se afle ce fracțiune din energia cinetică inițială a particulei m_1 este transferată particulei m_2, dacă ciocnirea este unidimensională: a) perfect elastică; b) plastică; c) ce fracțiune din energia cinetică inițială a particulei m_1 se transformă în căldură? (Fracțiunea este raportul dintre valoarea finală și inițială a unei mărimi).

R: a) $\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$; b) $\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$; c) $\frac{m_2}{m_1+m_2}$

13. O moleculă de masă $m = 5{,}0\cdot 10^{-26}$ kg, aflată într-un cilindru cu piston se mișcă cu viteza v_1 = 500 m/s și ajunge din urmă pistonul care se mișcă cu viteza v_2 = 1 m/s, de care se ciocnește frontal și perfect elastic. Să se afle: a) variația energiei cinetice și b) a impulsului moleculei în urma ciocnirii.

R: Indicație. Este vorba de o ciocnire cu un perete.

a) $\Delta E_c = -2mv_2(v_1 - v_2) = -5{,}0\cdot 10^{-23} J$; b) $\Delta p = -2m(v_1 - v_2) = -5{,}0\cdot 10^{-23} N\cdot s$

14. O bilă de masă m = 10 g, cade liber, lovește podeaua și urcă la înălțimea h = 80 cm. Variația de impuls la ciocnire este Δp = 0,17 N·s. La ce înălțime va urca bila, după următoarea ciocnire cu podeaua, dacă pierderea procentuală de energie la ciocnire este aceeași?

R: $h' = \dfrac{2m^2gh^2}{(\Delta p - m\sqrt{2gh})} \cong 7{,}5\text{cm}$

15. Două bile, de mase m_1 și m_2, sunt suspendate de fire paralele, astfel încât bilele să se atingă. Prima bilă este deviată până la înălțimea h_1 și lăsată liberă. La ce înălțime se ridică bilele dacă ciocnirea suferită este a) perfect elastică; b) plastică; c) câtă căldură se degajă în cazul ciocnirii plastice?

R: a) $h_1' = h_1\left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$; $h_2' = h_1\left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)^2$; b) $h' = h_1\left(\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2$; c) $Q = \left(\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g h_1$

BIBLIOGRAFIE:

A. Hristev, V. Fălie, D. Manda – FIZICA, Editura Didactică și Pedagogică, București – 1984
O. Rusu, M. Chiriță – FIZICĂ, manual pentru clasa a IX-a, Editura NICULESCU, 2004
A. Hristev și colectiv – Probleme de FIZICĂ pentru clasele IX-X, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
A. Hristev – PROBLEME DE FIZICĂ DATE LA EXAMENE, EDITURA TEHNICĂ, București, 1984
T. Crețu – FIZICĂ. Teorie și probleme, EDITURA TEHNICĂ, București 1991.
http://www.manualdefizica.ro/
https://ro.wikipedia.org/wiki/Pagina_principal%C4%83